

请首先仔细阅读《数学与金融学院“院长杯”数学建模竞赛论文格式规范》

龙虾养殖问题

近日，据德国《每日镜报》，小龙虾的泛滥成灾正在成为困扰柏林乃至整个德国生态和市政的重大问题。一个繁殖周期下，龙虾数量以斐波那契数列增长，1、2、3、5、8、13、21、34、55、89、……，这个数列的前后项之比越来越趋近于黄金分割 0.618，换言之，这个数量增长的速度几乎是以 $(\sqrt{5}+1)/2$ 为底数的指数增长列。

假设某种龙虾分四个年龄组，分别为一岁到四岁。各年龄组龙虾的平均重量分别为 0.507、1.155、1.786、2.299 (g)，各年龄组龙虾的自然死亡率为 0.8 (1/年)，且龙虾为季节性繁殖，平均每只四岁虾的产卵量为 1.109×10^5 (个)，三岁虾的产卵量为这个数的一半，两岁虾和一岁虾不产卵，产卵和孵化期为每年的最后 4 个月，卵孵化并成活为一岁虾，其成活率（一岁虾条数与产卵总量 n 之比）为 $1.22 \times 10^{11} / (1.22 \times 10^{11} + n)$ 。龙虾养殖场每年只在产卵孵化期前的 8 个月内进行捕捞作业。如果每年捕捞强度固定不变，这时单位时间捕捞量与各年龄组虾群条数成正比，比例系数称为捕捞强度系数。通常只捕三岁虾和四岁虾，其两个捕捞强度系数之比为 0.42: 1。

问题一：现假设一荒废的池塘中龙虾数量随时间变化如下表

年份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
数量/千只	3.8	3.93	3.96	4.03	4.11	4.14	4.17	4.18	4.27	4.4
年份	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
数量/千只	4.59	4.84	4.99	5.08	5.18	5.31	5.4	5.47	5.54	5.61

若该池塘一直无人管理且外界条件不变，请建立数学模型预测未来十年该池塘中龙虾数量。

问题二：为了满足龙虾养殖场的长期运营，需要实现每年开始捕捞时养殖场中各年龄虾数量不变。请建立数学模型分析如何在此前提下得到最高的年收获量（捕获龙虾总重量）。

问题三：若某龙虾养殖场计划养殖这种龙虾，要求 5 年后虾群的生产能力不能受到太大破坏。已知承包时各年龄组虾群的数量分别为：122、29.7、10.1、3.29 ($\times 10^9$ 只)，如果采用相同的捕捞强度，该养殖场应采取怎样的策略才能使总收获量最高。